논리철학연습 과제

Chapter 2 - System K, T and D

과학사 및 과학철학 협동과정 2004-20309 정동욱 | 제출일 : 2004.4.2

2.1 K에서 다음을 증명하라.

(a) $(L(p\supset q)\wedge L(q\supset r))\supset L(p\supset r)$

K1 $[p\supset q/p, q\supset r/q]$	(1)	$(L(p\supset q)\wedge L(q\supset r))\supset L((p\supset q)\wedge (q\supset r))$
PC	(2)	$((p\supset q)\wedge (q\supset r))\supset (p\supset r)$
(2)×DR1	(3)	$L((p\supset q)\wedge (q\supset r))\supset L(p\supset r)$
(1)×(3)×Syll	(4)	$(L(p\supset q)\wedge L(q\supset r))\supset L(p\supset r)$ (Q.E.D)

(b) $L(p\supset q)\supset (Mp\supset Mq)$

K9 $[\sim p/p, q/q]$	(1)	$L(\sim p\vee q)\supset (L\sim p\vee Mq)$
(1)×K5×PC	(2)	$L(p\supset q)\supset (Mp\supset Mq)$ (Q.E.D)

(c) $(L(p\supset q)\wedge M(p\wedge r))\supset M(q\wedge r)$

def M $[q\wedge r/p]$×PC	(1)	$\sim M(q\wedge r)\equiv L(q\supset \sim r)$
K1 $[p\supset \sim r/p, p\supset q/q]$	(2)	$(L(q\supset \sim r)\wedge L(p\supset q))\supset L((p\supset q)\wedge (q\supset \sim r))$
(2)×Syll×DR1	(3)	$(L(q\supset \sim r)\wedge L(p\supset q))\supset L(p\supset \sim r)$
(3)×(1)×Eq:	(4)	$(\sim M(q\wedge r)\wedge L(p\supset q))\supset L(p\supset \sim r)$
(4)×K5	(5)	$(\sim M(q\wedge r)\wedge L(p\supset q))\supset \sim M(p\wedge r)$
(5)×PC	(6)	$\sim M(q\wedge r)\supset (L(p\supset q)\supset \sim M(p\wedge r))$
(6)×PC	(7)	$\sim M(q\wedge r)\supset \sim (L(p\supset q)\wedge M(p\wedge r))$
(7)×Transp	(8)	$(L(p\supset q)\wedge M(p\wedge r))\supset M(q\wedge r)$ (Q.E.D)

(d) $M(p\supset (q\supset r))\supset ((Lp\supset Mq)\wedge (Lp\supset Mr))$

K7	(1)	$(Lp\supset Mq)\equiv M(p\supset q)$
K7 $[p/p, r/q]$	(2)	$(Lp\supset Mr)\equiv M(p\supset r)$
(1),(2)×PC	(3)	$((Lp\supset Mq)\wedge (Lp\supset Mr))\equiv (M(p\supset q)\wedge M(p\supset r))$
	(4)	$M(p\supset (q\wedge r))\equiv M((p\supset q)\wedge (p\supset r))$
(4)×K8	(5)	$M(p\supset (q\wedge r))\supset (M(p\supset q)\wedge M(p\supset r))$
(5), (3)×Eq:	(6)	$M(p\supset (q\wedge r))\supset ((Lp\supset Mq)\wedge (Lp\supset Mr))$ (Q.E.D)

(e) $M(p\supset p)\supset (Lq\supset Mq)$

K9×Transp	(1)	$\sim (Lp\vee Mq)\supset \sim L(p\vee q)$
(1)×PC×def M	(2)	$(\sim Lp\wedge L\sim q)\supset M(\sim p\wedge \sim q)$
(2) $[p\wedge \sim p/p, \sim q/q]$	(3)	$(\sim L(p\wedge \sim p)\vee Lq)\supset M((p\vee \sim p)\wedge q)$

(3) ×PC (4) $(\sim L(p\wedge\sim p)\vee Lq)\supset Mq$

def M [$p\supset p/p$] ×PC (5) $M(p\supset p)\equiv\sim L(p\wedge\sim p)$

(4) ×(5) ×Eq: (6) $(M(p\supset p)\wedge Lq)\supset Mq$

(6) ×PC (7) $M(p\supset p)\supset(Lq\supset Mq)$ (Q.E.D)

(f) $(Lp\wedge M(q\supset r))\supset(L(p\supset q)\supset M(p\wedge r))$

K9 [$\sim q/p,\sim p/q$]×Transp (1) $(Lp\wedge Mq)\supset M(p\wedge q)$

(1) [$p/p, q\supset r/q$] (2) $(Lp\wedge M(q\supset r))\supset M(p\wedge(q\supset r))$

K7 [$p\supset q/p, p\wedge r/q$] (3) $(L(p\supset q)\supset M(p\wedge r))\equiv M((p\supset q)\supset(p\wedge r))$

PC (4)
$$\begin{aligned}((p\supset q)\supset(p\wedge r)) &\equiv((\sim p\vee q)\supset(p\wedge r))\\ &\equiv(\sim(\sim p\vee q)\vee(p\wedge r))\\ &\equiv((p\wedge\sim r)\vee(p\wedge r))\\ &\equiv(p\wedge(\sim q\vee r))\equiv(p\wedge(q\supset r))\end{aligned}$$

(3) ×(4) ×Eq: (5) $(L(p\supset q)\supset M(p\wedge r))\equiv M(p\wedge(q\supset r))$

(2) ×(5) ×Eq: (6) $(Lp\wedge M(q\supset r))\supset(L(p\supset q)\supset M(p\wedge r))$ (Q.E.D)

(g) $(Lp\wedge Mq)\supset M(p\wedge q)$

K9 [$\sim q/p,\sim p/q$] ×Transp (1) $(Lp\wedge Mq)\supset M(p\wedge q)$ (Q.E.D)

2.2 (a) K*의 공리적 기초는 다음과 같은 점을 제외하고 K와 똑같다고 하자. 즉 N이 공리 LT: $L(p\supset p)$와 규칙 R* $\vdash\alpha\supset\beta\rightarrow\vdash L\alpha\supset L\beta$로 대체된다. 이 때 K와 K*가 똑같은 정리들을 갖는다는 것을 보여라.

i) K*의 모든 정리가 K의 정리임을 보이자. K*의 공리적 기초들이 K의 공리적 기초들로부터 도출되면 성공.

① LT : $L(p\supset p)$이 도출됨. (아래는 증명)

PC (1) $p\supset p$

(1) ×N (2) $L(p\supset p)$

② R*의 도출은 책에 있으므로 생략

①과 ②에 의해 K*의 모든 정리는 K의 정리이다.

ii) K의 모든 정리가 K*의 정리임을 보이자. K의 공리적 기초들이 K*의 공리적 기초들로부터 도출되면 성공.

N : $\vdash\alpha\rightarrow\vdash L\alpha$이 도출됨. (아래는 증명)

Given (1) α

(1) ×PC (2) $(p\supset p)\supset\alpha$

(2) ×R* (3) $L(p\supset p)\supset L\alpha$

(1),(3) ×MP (4) $L\alpha$

따라서 K의 모든 정리는 K*의 정리이다.

i), ii)에 의해 K와 K*는 똑같은 정리들을 갖는다. (Q.E.D)

(b) K**는 N과 K가 LT, R*, K2* $(Lp\wedge Lq)\supset L(p\wedge q)$로 대체된 K라고 가정하자. 이 때 K와 K**가 똑같은 정리들을 갖는다는 것을 보여라.

i) K**의 공리적 기초들(LT, R*, K2*)이 K의 공리적 기초들로부터 도출되므로, K**의 모든 정리들은 K의 정리이다. (증명생략)

ii) K의 모든 정리들이 K**의 정리임을 증명하자. N, K가 K**의 공리적 기초들로부터 도출되면 성공.

① N은 LT와 R*로부터 도출됨. ((a)에서 증명했음)

② K: $L(p\supset q)\supset(Lp\supset Lq)$이 도출됨. (아래는 증명)

K2* $[p\supset q/p, p/q]$	(1) $(L(p\supset q)\wedge Lp)\supset L((p\supset q)\wedge p)$
(1)×PC	(2) $(L(p\supset q)\wedge Lp)\supset L(p\wedge q)$
PC	(3) $(p\wedge q)\supset q$
(3)×R*	(4) $L(p\wedge q)\supset Lq$
(2),(4)×Syll	(5) $(L(p\supset q)\wedge Lp)\supset Lq$
(5)×PC	(6) $L(p\supset q)\supset(Lp\supset Lq)$

①과 ②에 의해 K의 모든 정리는 K**의 정리이다.

i), ii)에 의해 K와 K**는 같은 정리들을 갖는다. (Q.E.D)

2.3 T*는 다음과 같은 점을 제외하고 T와 똑같다고 하자. 즉 T*는 K 대신에 K* $L(L(p\supset q)\supset(Lp\supset Lq))$를 포함하고 N 대신에 R*를 포함한다. T와 T*가 똑같은 정리들을 갖는다는 것을 보여라.

i) T*의 모든 정리들은 T의 정리이다. (증명생략)

ii) T의 모든 정리들은 T*의 정리임을 보이자. K와 N이 T*의 공리적 기초들로부터 도출되면 성공.

① K : $L(p\supset q)\supset(Lp\supset Lq)$이 도출됨. (아래는 증명)

T $[L(p\supset q)\supset(Lp\supset Lq)/p]$	(1) $L(L(p\supset q)\supset(Lp\supset Lq))\supset(L(p\supset q)\supset(Lp\supset Lq)$
(1)×K*×MP	(2) $L(p\supset q)\supset(Lp\supset Lq)$

② N : $\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\alpha$이 도출됨. (아래는 증명)

Given	(1) α
(1)×K×PC	(2) $(L(p\supset q)\supset(Lp\supset Lq))\supset\alpha$ (①에서 도출한 K는 정리로 사용가능)
(2)×R*	(3) $L(L(p\supset q)\supset(Lp\supset Lq))\supset L\alpha$
(3)×K*×MP	(4) $L\alpha$

①과 ②에 의해 T의 모든 정리들은 T*의 정리이다.

i), ii)에 의해 T와 T*는 똑같은 정리들을 갖는다. (Q.E.D)

2.4 K가 $LM\alpha$ 형태의 어떠한 정리들도 갖지 않음을 증명하여라.

i) $LM\alpha$가 K의 정리라면, $M\alpha$도 K의 정리이어야 한다. (증명은 2.10에서 할 것임)

ii) $M\alpha$ 형태의 바른식은 '아무도 볼 수 없는 세계가 있는' 프레임 설정에서 항상 타당하지 못하므로, $M\alpha$는 K의 정리가 될 수 없다.

i)과 ii)는 모순이다. 따라서 $LM\alpha$ 형태의 바른식은 K의 정리가 될 수 없다. (Q.E.D)

2.5 T'가 T대신에 T' $p\supset Mp$를 갖는다는 것만 제외하고 정확하게 T와 같다고 하자. T와 T'가 똑같은 정리들을 갖는다는 것을 증명하라.

i) T'의 모든 정리들은 T의 정리이다. (증명생략)

ii) T의 모든 정리들이 T'의 정리임을 보이자. T가 T'의 공리적 기초로부터 도출되면 성공.

T : $Lp\supset p$이 도출됨. (아래는 증명)

T' $[\sim p/p]$	(1) $\sim p\supset M\sim p$
(1)×Transp	(2) $Lp\supset p$

i), ii)에 의해 T와 T'은 같은 정리들을 갖는다. (Q.E.D)

2.6 (a) 다음이 K의 규칙임을 증명하라.

$\vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \vdash M\alpha \vee L\beta$

Given	(1) $\alpha \vee \beta$	
(1)×N	(2) $L(\alpha \vee \beta)$	
(2)×K9	(3) $M\alpha \vee L\beta$	(Q.E.D)

(b) 다음이 K의 규칙이 아니고 D의 규칙임을 증명하라.

$\vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \vdash M\alpha \vee M\beta$

i) 만약 위의 규칙이 K의 규칙이라면,

$(p \vee \sim p)$가 K의 정리이므로 $(Mp \vee M\sim p)$도 K의 정리이어야 한다. 그러나 $(Mp \vee M\sim p)$는 '아무도 볼 수 없는 세계가 있는' 프레임 설정에서 항상 타당하지 못하다. 따라서 위의 규칙은 K의 규칙이 아니다. (Q.E.D)

ii) D의 규칙임을 증명

$\vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \vdash M\alpha \vee M\beta$

Given	(1) $\alpha \vee \beta$	
(1)×N×D	(2) $M(\alpha \vee \beta)$	
(2)×K6	(3) $M\alpha \vee M\beta$	(Q.E.D)

(c) 다음이 D의 규칙이 아니고, T의 규칙임을 증명하라.

$\vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \vdash M\alpha \vee \beta$

i) 만약 위의 규칙이 D의 규칙이라면,

$(p \vee \sim p)$가 D의 정리이므로 $(Mp \vee \sim p)$도 D의 정리이어야 한다. 그러나 $(Mp \vee \sim p)$는 $(p \supset Mp)$, 즉 T1과 동치인 식이다. T1은 D의 정리가 아니다(증명 생략). 따라서 위의 규칙은 D의 규칙이 아니다. (Q.E.D)

ii) T의 규칙임을 증명

$\vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \vdash M\alpha \vee \beta$

Given	(1) $\alpha \vee \beta$	
(1)×(a)	(2) $M\alpha \vee L\beta$	[위의 (a)는 T의 규칙으로 사용가능]
T [β/p]	(3) $L\beta \supset \beta$	
(2)×(3)	(4) $M\alpha \vee \beta$	(Q.E.D)

2.7 D에서 다음을 증명하라.

(a) $M\sim p \vee M\sim q \vee M(p \vee q)$

D×PC	(1) $\sim Lp \vee Mp$	
(1)×K5	(2) $M\sim p \vee Mp$	
(2) [q/p]	(3) $M\sim q \vee Mq$	
(2)×(3)	(4) $M\sim p \vee M\sim q \vee Mp \vee Mq$	
(4)×K6	(5) $M\sim p \vee M\sim q \vee M(p \vee q)$	(Q.E.D)

(b) $\sim L(Lp \wedge L\sim p)$

D×PC	(1) $\sim Lp \vee Mp$	
(1)×K5	(2) $M\sim p \vee Mp$	
(2)×T1	(3) $M(M\sim p \vee Mp)$	
(3)×def M	(4) $\sim L(Lp \wedge L\sim p)$	(Q.E.D)

2.8 T2 : $M(p \supset Lp)$가 D의 정리가 아님을 보여라.
반증모델을 찾으면 된다.
서로 볼 수 있으나 자기자신을 볼 수 없는 두 세계 $w_{1,}\ w_2$만으로 구성된 프레임을 가정하다. 이렇게 만들어진 프레임은 D체계에 속한다. 그러나 이러한 설정에서 $M(p \supset Lp)$는 타당하지 않다. 따라서 T2는 D의 정리가 아니다. (Q.E.D)

2.9 $M\alpha$가 D-타당하다면 α도 D-타당함을 보여라.
α가 D-타당하지 않으면, $M\alpha$도 D-타당하지 않음을 보이면 된다. 즉, α가 타당하지 않은 D-frame이 존재한다면 $M\alpha$가 타당하지 않은 D-frame도 '꼭' 존재함을 보이면 된다.
i) $V(\alpha, w)=0$이 있는 D-model이 존재한다고 하자.
ii) 위의 D-model에 w만을 보는 $w*$를 추가한 새로운 모델 model*을 만들 수 있으며, 이 model*는 당연히 D-frame에 기반해 있다. 한편, model*에서는 $V(M\alpha, w*)=0$이 되므로, $M\alpha$는 model*에서 타당하지 않다.
i),ii)에 의해 α가 타당하지 않은 D-frame이 존재한다면 $M\alpha$가 타당하지 않은 D-frame도 '반드시' 존재하게 된다. 따라서 α가 D-타당하지 않으면, $M\alpha$도 D-타당하지 않다. (Q.E.D)

2.10 $\vdash L\alpha \rightarrow \vdash \alpha$가 K와 D의 규칙이라는 것을 증명하여라.
i) α가 (K/D)-타당하지 않다고 하자. 즉, $V(\alpha, w)=0$이 있는 (K/D)-model이 존재한다고 하자.
ii) 위의 model에 w를 보는 $w*$를 추가하여 새로운 model*를 만들 수 있고, 이때 $V(L\alpha, w*)=0$이므로 $L\alpha$는 model*가 기반해있는 frame에서 타당하지 못하다. 그런데, 위의 model이 K-frame에 기반해있으면 model* 또한 K-frame에 기반해 있게 되며, 위의 model이 D-frame에 기반해 있으면 model* 또한 D-frame에 기반해 있게 된다.
i),ii)에 의해 α가 (K/D)-타당하지 않으면, $L\alpha$도 (K/D)-타당하지 않게 된다.
따라서 $\vdash L\alpha \rightarrow \vdash \alpha$는 K와 D의 규칙이다. (Q.E.D)

2.11 $\vdash L\alpha \supset L\beta \rightarrow \vdash \alpha \supset \beta$ ($L^{\rightarrow}$)이 K와 D의 규칙이나, T의 규칙은 아님을 증명하라.

i) $V(\alpha \supset \beta, w)=0$ [즉, $V(\alpha, w)=1$, $V(\beta, w)=0$]이 있는 model이 존재한다고 하자.
ii) 위의 model에 w만을 볼 수 있는 $w*$를 추가하여 새로운 model*를 만들 수 있다. 이 때 $V(L\alpha, w*)=1$, $V(L\beta, w*)=0$이므로 $V(L\alpha \supset L\beta, w*)=0$이 되고, 따라서 $L\alpha \supset L\beta$는 model*가 기반해있는 frame에서 타당하지 못하다. 그런데, 위의 model이 K-frame이나 D-frame에 기반해 있으면, 새롭게 만든 model* 또한 K-frame이나 D-frame에 기반하게 된다. 반면, 이 방식으로 만든 model*는 체계 T에 속하지 못한다.
i), ii)에 의해 $\alpha \supset \beta$가 K나 T의 정리가 아니면, $L\alpha \supset L\beta$도 K나 T의 정리가 아니다. 따라서, $L^{\rightarrow}$이 K와 D의 규칙인 것을 확인할 수 있다. 반면, T의 규칙인지는 확인할 수 없다. (Q.E.D)

[T의 규칙인지 반증사례 찾기]
$L(p \vee \sim Lp) \supset Lq$는 T의 정리이다. (아래는 이 바른식이 T의 정리임을 증명한 것)

T2	(1) $M(p \supset Lp)$
(1) $\times$PC	(2) $M\sim q \supset M(p \supset p)$
(2)def M	(3) $M\sim q \supset \sim L\sim(p \supset p)$

(3) ×Transp (4) $L(p \wedge \sim Lp) \supset Lq$

$\mathrm{L}^{\rightarrow}$이 T의 규칙이라면, $(p \wedge \sim Lp) \supset q$도 T의 정리이어야 하지만, 그러하지 못하다. (아래는 그 증명)

Given (1) $(p \wedge \sim Lp) \supset q$

(2) $\sim(p \wedge \sim Lp) \vee q$

(3) $\sim p \vee Lp \vee q$

(4) $(p \supset Lp) \vee q$

(4)까지 정리한 식에서 $p \supset Lp$는 T의 정리가 아니며, q도 T의 정리가 아니다.
따라서 $(p \supset Lp) \vee q$는 T의 정리가 아니다.

반증사례가 있으므로, $\mathrm{L}^{\rightarrow}$은 T의 규칙이 아니다.

(2장 연습문제 끝)